

1. Connaître la division euclidienne

1 Poser des divisions euclidiennes

Dans chaque cas, poser la division euclidienne. Quelle égalité peut-on alors écrire ?

a.

$$\begin{array}{r} 161 \overline{) 111} \\ \underline{51} \\ 7 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r} 342 \overline{) 7} \\ \underline{62} \\ 6 \end{array}$$

Correction :

- a. $161 = 11 \times 14 + 7$ (avec un reste de 7).
b. $342 = 7 \times 48 + 6$ (avec un reste de 6).

2 Rechercher le dividende

13 est le quotient de la division euclidienne d'un nombre par 32 et 8 est le reste. Quel est ce nombre ?

Correction : Dividende = Diviseur $\times$ Quotient + Reste = $32 \times 13 + 8 = 416 + 8 = 424$. Ce nombre est donc **424**.

3 Justifier la divisibilité par 7

Pour chaque nombre indiqué, dire s'il est divisible par 7. Justifier.

- a. 32 Non, car $32 = 7 \times 4 + 4$ (reste non nul).
b. 42 Oui, car $42 = 7 \times 6$.
c. 63 Oui, car $63 = 7 \times 9$.
d. 92 Non, car $92 = 7 \times 13 + 1$.
e. 105 Oui, car $105 = 7 \times 15$.

4 Vocabulaire multiple / diviseur

Compléter chacune des phrases suivantes avec le mot « multiple » ou « diviseur ».

- a. 18 est un**multiple** de 6.
b. 8 est un**diviseur** de 56.
c. 14 est un**diviseur** de 28.
d. 88 est un**multiple** de 11.

5 Critique de réponses

Tania, Zoé, Yan et Anouh doivent effectuer la division euclidienne de 77 par 8. Parmi les réponses suivantes, dire qui a raison.

- Tania : $77 \div 8 = 9,625$
- Zoé : $77 = 9 \times 9 - 4$
- Yan : $77 = 8 \times 9 + 5$

- Anouh : $77 = 7 \times 9 + 14$

Correction : C'est **Yan** qui a raison. En effet, dans la division euclidienne de 77 par 8, $77 = 8 \times 9 + 5$ avec un reste égal à 5 qui est bien strictement inférieur au diviseur 8.

6 **MODE EXPERT** — Recherche de restes et dividendes

Le diviseur d'une division euclidienne est 5 et son quotient est 17.

Quels sont tous les restes et tous les dividendes possibles ?

Correction : Le reste r doit vérifier $0 \leq r < 5$, donc les restes possibles sont 0, 1, 2, 3 et 4.

Les dividendes correspondants ($N = 5 \times 17 + r = 85 + r$) sont :

- Si $r = 0$: $N = 85$
- Si $r = 1$: $N = 86$
- Si $r = 2$: $N = 87$
- Si $r = 3$: $N = 88$
- Si $r = 4$: $N = 89$

2. Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

7 Critères par 2, 5 et 10

Compléter le tableau suivant par Oui ou Non.

est divisible par →	2	5	10
86	Oui	Non	Non
540	Oui	Oui	Oui
765	Non	Oui	Non
1 430	Oui	Oui	Oui

8 Listes de nombres divisible par 2 ou 5

On donne les nombres suivants : $30 \cdot 45 \cdot 50 \cdot 422 \cdot 600 \cdot 8\,436 \cdot 75\,435$.

- Lesquels sont divisibles par 2 ? $30 ; 50 ; 422 ; 600 ; 8\,436$.
- Lesquels sont divisibles à la fois par 2 et par 5 ? ceux qui se terminent par 0 : $30 ; 50 ; 600$.

9 Critères par 3 et 9

Compléter le tableau suivant par Oui ou Non.

est divisible par →	3	9
246	Oui	Non
6 300	Oui	Oui
7 670	Non	Non
8 160	Oui	Non
32 486	Non	Non

10 Divisibilité par 9

- Les nombres 2 ; 22 ; 222 et 2 222 sont-ils divisibles par 9 ? Justifier.
Sommes des chiffres : 2, 4, 6, 8. Aucune n'est un multiple de 9, donc aucun de ces nombres n'est divisible par 9.
- Existe-t-il un nombre qui ne s'écrit qu'avec des 2 et qui est divisible par 9 ? Justifier.
Oui, le nombre composé de 9 fois le chiffre 2 (222 222 222), car la somme de ses chiffres vaut $9 \times 2 = 18$, qui est divisible par 9.

11 Trouver le chiffre manquant

Déterminer le chiffre que l'on doit écrire à la place du point d'interrogation afin que le nombre 4 26? 835 soit divisible par 9. Justifier.

Correction : Somme des chiffres connus : $4+2+6+8+3+5 = 28$. Le multiple de 9 immédiatement supérieur est 36. Le chiffre manquant est $36 - 28 = 8$. Le nombre est 4 268 835.

12 Lister tous les diviseurs

Déterminer tous les diviseurs des nombres suivants.

- $20 \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
- $25 \{1, 5, 25\}$

c. 48 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

d. 11 $\{1, 11\}$

13 Diviseurs communs

Déterminer tous les diviseurs communs à 30 et 36.

Correction : Diviseurs de 30 : $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Diviseurs de 36 : $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

Les diviseurs communs sont **1, 2, 3 et 6**.

14 MODE EXPERT — Plus grand diviseur commun

Quel est le plus grand diviseur commun à 32 et 56 ?

Correction : Diviseurs de 32 : $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Diviseurs de 56 : $\{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$.

Le plus grand diviseur commun est **8**.

3. Reconnaître un nombre premier

15 Justifier qu'un nombre n'est pas premier

Justifier que les nombres suivants ne sont pas premiers.

- a. 44 Pair et supérieur à 2 (divisible par 2).
- b. 447 Somme des chiffres = 15, divisible par 3.
- c. 3 672 Pair (divisible par 2).
- d. 12 644 Pair (divisible par 2).
- e. 777 777 Divisible par 7 (ou par 3, somme = 42).

16 Justifier qu'un nombre est premier

Justifier que 5 est un nombre premier.

Correction : 5 ne possède exactement que deux diviseurs entiers positifs distincts : 1 et lui-même.

17 Somme de nombres premiers

Déterminer deux nombres premiers dont la somme est égale à 12.

Correction : $5 + 7 = 12$ (5 et 7 sont tous deux premiers).

18 Somme de deux nombres premiers

Dans la liste des nombres premiers inférieurs à 30, quels sont les nombres qui sont égaux à la somme de deux autres nombres premiers ?

Correction : Liste des nombres premiers < 30 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

- $5 = 2 + 3$
- $7 = 2 + 5$
- $13 = 2 + 11$
- $19 = 2 + 17$

Les nombres sont **5, 7, 13 et 19**.

19 Différence de deux nombres premiers

Lou affirme : « 11 et 23 sont premiers, donc leur différence est un nombre premier ». A-t-elle raison ?

Correction : $23 - 11 = 12$. Or 12 est un nombre pair supérieur à 2, donc 12 n'est pas premier.

Lou a tort.

20 Vrai ou Faux ?

Justifier chaque réponse.

- a. Un nombre dont le chiffre des unités est 1 est toujours premier. **Faux**, par exemple 21 finit par 1 et $21 = 3 \times 7$.
- b. Si un nombre est premier, alors son double est premier. **Faux**, le double d'un nombre $p \geq 2$ est divisible par 2.
- c. Aucun multiple de 7 supérieur à 7 n'est premier. **Vrai**, car tout multiple de 7 supérieur à 7 est divisible au moins par 1, 7 et lui-même.

21 MODE EXPERT — Programme de calcul et nombre premier

Yarnah donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Le multiplier par lui-même.
- Additionner au résultat le nombre de départ.
- Ajouter 17.

1. Yarnah affirme que si on applique ce programme de calcul à l'entier 3, le résultat est un nombre premier. A-t-elle raison ?

Calcul : $3 \times 3 = 9 \rightarrow 9 + 3 = 12 \rightarrow 12 + 17 = 29$. 29 est premier. **Elle a raison.**

2. Simon affirme que c'est encore vrai si on applique le programme de calcul avec le nombre 4. A-t-il raison ?

Calcul : $4 \times 4 = 16 \rightarrow 16 + 4 = 20 \rightarrow 20 + 17 = 37$. 37 est premier. **Il a raison.**

4. Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

22 Reconnaître une décomposition

Les décompositions suivantes sont-elles des décompositions en produit de facteurs premiers ?

- $2 \times 11 \times 13$ Oui, 2, 11 et 13 sont tous premiers.
- $3 \times 12 \times 17$ Non, car 12 n'est pas premier ($12 = 2^2 \times 3$).
- $5 \times 13 \times 21$ Non, car 21 n'est pas premier ($21 = 3 \times 7$).

23 Entourer la bonne décomposition

Entourer la décomposition en produit de facteurs premiers de 4 950 :

- $4\,950 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 15$
- $4\,950 = 2 \times 5 \times 5 \times 9 \times 11$
- $4\,950 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11$ (Bonne réponse)
- $4\,950 = 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 25$

24 Propriétés sur les produits de facteurs premiers

Deux nombres A et B sont écrits sous forme de produits de facteurs premiers :

$$A = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7 \quad \text{et} \quad B = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$$

- Que valent A et B ? $A = 980$ et $B = 7\,350$.
- 3 est-il un diviseur de A ? Non, 3 n'apparaît pas dans la décomposition de A .
- 7 est-il un diviseur de B ? Oui, 7 figure dans la décomposition de B .
- 10 est-il un diviseur de A ? Oui, car $10 = 2 \times 5$, et A contient au moins un 2 et un 5.
- Donner deux diviseurs communs à A et à B qui sont supérieurs à 20. Exemples : $5 \times 7 = 35$ et $7 \times 7 = 49$.

25 MODE EXPERT — Divisibilité entre grands nombres

On donne ci-dessous, les décompositions en produit de facteurs premiers de 32 340 et 770 :

$$32\,340 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \quad \text{et} \quad 770 = 2 \times 5 \times 7 \times 11$$

Sans utiliser de calculatrice, expliquer pourquoi 32 340 est divisible par 770.

Correction : Tous les facteurs premiers de 770 (2, 5, 7, 11) apparaissent dans la décomposition de 32 340 avec des exposants supérieurs ou égaux. On a $32\,340 = 770 \times (2 \times 3 \times 7) = 770 \times 42$.

26 Décomposer des nombres entiers

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers.

- $54 = 2 \times 3^3$
- $126 = 2 \times 3^2 \times 7$
- $580 = 2^2 \times 5 \times 29$

27 Décomposer un grand nombre à partir d'un produit

Sachant que $48\,510 = 70 \times 693$, décomposer le nombre 48 510 en produit de facteurs premiers.

Correction : $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $693 = 3^2 \times 7 \times 11$.

Donc $48\,510 = (2 \times 5 \times 7) \times (3^2 \times 7 \times 11) = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$.

28 MODE EXPERT — Décomposition et recherche de tous les diviseurs

Décomposer le nombre 462 en produit de facteurs premiers et en déduire tous les diviseurs de 462.

Correction : Décomposition : $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$.

Diviseurs (au nombre de 16) : 1, 2, 3, 6, 7, 11, 14, 21, 22, 33, 42, 66, 77, 154, 231, 462.

5. Problèmes d'arithmétique

33 Cantine

À la cantine, le chef cuisinier veut distribuer une glace en cornet à chacun des 483 élèves. Pour cela, il achète des paquets de glaces en cornet. Chaque paquet contient 20 glaces. Combien de paquets doit-il prévoir ?

Correction : $483 \div 20 = 24,15$. Comme $24 \times 20 = 480$, 24 paquets ne suffisent pas pour nourrir 483 élèves. Il doit donc prévoir **25 paquets**.

34 Rangement

Léo range sa chambre. Il empile toutes ses BD pour les ranger sur des étagères. Il possède 47 BD et peut en mettre 8 sur chaque étagère.

- Combien lui faut-il d'étagères ? $47 = 8 \times 5 + 7$. Il lui faut **5 étagères complètes plus une supplémentaire, soit 6 étagères**.
- Combien de BD contiendra la dernière étagère ? **Elle contiendra le reste, soit 7 BD**.

35 Location de bus

Un club de sport veut transporter ses 178 supporters pour les emmener sur le lieu du prochain match. L'organisateur fait faire deux devis à un transporteur.

- Option 1 :** Louer des bus qui peuvent transporter 50 personnes. Chaque bus coûte 1 375 €.
 - Option 2 :** Louer des minibus qui peuvent contenir 12 personnes. Chaque minibus coûte 380 €.
- S'il choisit l'option 1, combien de bus l'organisateur doit-il louer ? $178 \div 50 = 3,56$, il faut **4 bus**. Coût : $4 \times 1\,375 = 5\,500$ €.
 - S'il choisit l'option 2, combien de minibus l'organisateur doit-il louer ? $178 \div 12 = 14,83$, il faut **15 minibus**. Coût : $15 \times 380 = 5\,700$ €.
 - Quelle option est la moins chère ? **L'Option 1** est la moins chère (5 500 € contre 5 700 €).

36 Bouquets de roses

Camille dispose de 161 roses. Il veut faire des bouquets tous identiques constitués de plusieurs roses en utilisant toutes les fleurs. Il veut faire le plus grand nombre possible de bouquets.

- Décomposer 161 en produit de facteurs premiers. $161 = 7 \times 23$.
- Quel est le plus grand nombre de bouquets identiques que pourra réaliser Camille ? **Il pourra faire au maximum 23 bouquets**.
 - Combien de roses y aura-t-il dans chaque bouquet ? **S'il fait 23 bouquets, il y aura 7 roses par bouquet**.

37 Chiffres manquants

Leïla a écrit sur son cahier le nombre ci-dessous :

7  4 

Malheureusement, deux taches d'encre ont effacé deux des chiffres du nombre. Trouver toutes les valeurs possibles pour ces chiffres sachant que le nombre est divisible par 3 et par 5. Justifier.

Correction : Le nombre s'écrit **7a4b**.

- Divisibilité par 5 : b doit être 0 ou 5.
- Si $b = 0$, la somme des chiffres est $7 + a + 4 + 0 = 11 + a$. Pour que ce soit un multiple de 3, a peut valoir **1, 4 ou 7** (nombres : 7 140, 7 440, 7 740).
- Si $b = 5$, la somme des chiffres est $7 + a + 4 + 5 = 16 + a$. Pour que ce soit un multiple de 3, a peut valoir **2, 5 ou 8** (nombres : 7 245, 7 545, 7 845).

38 Le funiculaire

Amélie attend le funiculaire qui doit la transporter en haut des pistes de ski. Il y a un funiculaire toutes les 5 minutes. Elle arrive à l'arrêt du funiculaire à 8 h avec son ticket numéroté et attend son tour. Un funiculaire vient de partir à l'instant et 126 personnes attendent devant elle le prochain funiculaire.

→ À quelle heure Amélie va-t-elle prendre son funiculaire sachant que chaque funiculaire peut emporter 30 personnes ?

Correction : $126 = 30 \times 4 + 6$. 4 funiculaires prendront $4 \times 30 = 120$ personnes. Amélie sera donc dans le 5^e funiculaire.

Le délai est de $5 \times 5 \text{ min} = 25 \text{ min}$. Elle prendra donc le funiculaire à **8 h 25**.

39 Codage

Romain veut protéger son vélo. Il possède un cadenas composé de 4 chiffres qui s'ouvre avec la combinaison 2373.

1. Il se demande si ce nombre est premier. Est-ce le cas ? **Non**, la somme des chiffres vaut $2 + 3 + 7 + 3 = 15$, qui est un multiple de 3. Donc 2 373 est divisible par 3.
2. Il veut modifier la combinaison du code. Il choisit le nombre 8 777. Il se demande si ce nouveau nombre est premier. Pour cela, il utilise un tableur.
 - a. Quelle formule Romain a-t-il écrite dans la cellule B1 puis recopiée vers le bas ? **=MOD(8777; A1)**
 - b. Le nombre 8 777 est-il premier ? **Oui**, 8 777 n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{8777} \approx 93,68$.

40 Nombres amicaux

On dit que deux nombres entiers distincts sont amicaux lorsque chacun des deux nombres est égal à la somme des diviseurs de l'autre (excepté lui-même).

Montrer que 220 et 284 sont deux nombres amicaux.

Correction : Diviseurs propres de 220 : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.

Somme = $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$.

Diviseurs propres de 284 : 1, 2, 4, 71, 142.

Somme = $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

Les deux nombres sont donc bien amicaux.