

FICHE 3 : Problèmes racines – CORRECTION

1 Côté d'un carré

Détermine la valeur exacte, puis approchée au millimètre près, de la longueur du côté d'un carré d'aire 17 cm^2 .

Correction : L'aire d'un carré de côté c est donnée par $c^2 = 17 \text{ cm}^2$.

- Valeur exacte : $c = \sqrt{17} \text{ cm}$.
- Valeur approchée au millimètre (au dixième de cm) près : $c \approx 4,1 \text{ cm}$.

2 Sujet type DNB — Métropole

Soit un triangle ABC tel que $AB = \sqrt{75} \text{ cm}$, $BC = \sqrt{48} \text{ cm}$ et $AC = \sqrt{27} \text{ cm}$.

Écrire les longueurs AB , BC et AC sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un nombre entier.

Calculer le périmètre exact du triangle ABC sous la forme $b\sqrt{3}$, puis en donner la valeur arrondie au millimètre près.

Montrer que l'aire exacte du triangle est un nombre entier et calculer sa valeur.

Correction : • **Écriture sous la forme $a\sqrt{3}$: **

$$AB = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$BC = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$AC = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

• **Périmètre exact et arrondi : **

$$\mathcal{P} = AB + BC + AC = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Arrondi au mm près : $12\sqrt{3} \approx 20,8 \text{ cm}$.

• **Nature et aire du triangle : **

$$AC^2 + BC^2 = (\sqrt{27})^2 + (\sqrt{48})^2 = 27 + 48 = 75$$

$$AB^2 = (\sqrt{75})^2 = 75$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C .

$$\text{Aire} = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}}{2} = \frac{12 \times 3}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

18 est un nombre entier.

3 DNB Amérique du Sud, novembre 2019

On considère les deux nombres : $E = \sqrt{45} - 2\sqrt{80} + \sqrt{180}$ et $F = (2\sqrt{5} + 1)(2\sqrt{5} - 1)$

Écrire E sous la forme $a\sqrt{5}$, où a est un nombre entier relatif.

Développer et réduire F pour montrer que c'est un nombre entier.

Comparer E^2 et F .

Correction : • $E = \sqrt{9 \times 5} - 2\sqrt{16 \times 5} + \sqrt{36 \times 5} = 3\sqrt{5} - 2 \times 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = (3 - 8 + 6)\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

• En développant par double distributivité :

$$F = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} \times 1 + 1 \times 2\sqrt{5} - 1 \times 1$$

$$F = 4 \times 5 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 1$$

$$F = 20 - 1 = 19, \text{ qui est bien un nombre entier.}$$

• $E^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$. Comme $5 < 19$, on a $E^2 < F$.

4 DNB Nouvelle-Calédonie, décembre 2020

Pour vérifier l'équerrage d'un mur, un artisan mesure la diagonale d'un panneau rectangulaire de 1,20 m de largeur et 1,60 m de hauteur.

Calculer la valeur exacte de la diagonale en mètres.

Si la hauteur avait été de 1,50 m pour la même largeur, la valeur exacte de la diagonale serait $\sqrt{3,69}$ m.

Donner la valeur approchée par excès au centième près de cette diagonale. Convertir cette valeur approchée en cm.

Correction : • D'après le théorème de Pythagore : $d = \sqrt{1,20^2 + 1,60^2} = \sqrt{1,44 + 2,56} = \sqrt{4} = 2$ m.

- $\sqrt{3,69} \approx 1,9209\dots$ m. La valeur approchée par excès au centième près est 1,93 m.
- Conversion : 1,93 m = 193 cm.

4 Triangle rectangle

Un terrain a la forme d'un triangle ABC rectangle en A .

On donne $AB = \sqrt{32}$ m et $AC = \sqrt{18}$ m.

Montrer que la longueur exacte de l'hypoténuse BC s'écrit sous la forme $5\sqrt{2}$ m.

Calculer l'aire exacte du triangle ABC en m^2 .

Exprimer le périmètre exact du triangle ABC sous la forme $a\sqrt{2}$, où a est un entier.

Correction : • D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (\sqrt{32})^2 + (\sqrt{18})^2 = 32 + 18 = 50.$$

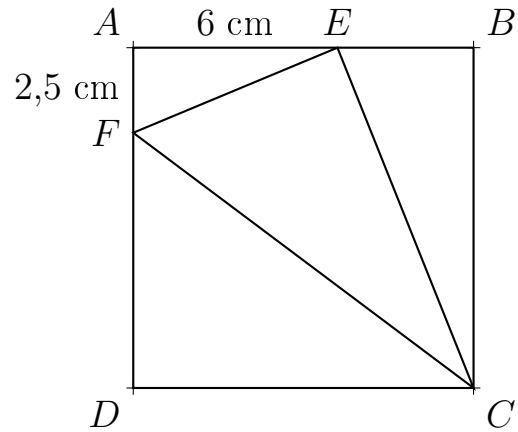
D'où $BC = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ m.

- Aire = $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{12 \times 2}{2} = 12 \text{ m}^2$.
- $\mathcal{P} = AB + AC + BC = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ m.

5 Problème géométrique

$ABCD$ est un carré de côté 10 cm.

1. Calculer EF , EC et FC .
2. Le triangle FEC est-il rectangle ?



Correction :

1. On calcule les longueurs des côtés dans les triangles rectangles périphériques :
 - Dans le triangle AEF rectangle en A : $AE = 6$ cm et $AF = 2,5$ cm.
 $EF^2 = AE^2 + AF^2 = 6^2 + 2,5^2 = 36 + 6,25 = 42,25 \implies EF = \sqrt{42,25} = 6,5$ cm.
 - Dans le triangle EBC rectangle en B : $EB = 10 - 6 = 4$ cm et $BC = 10$ cm.
 $EC^2 = EB^2 + BC^2 = 4^2 + 10^2 = 16 + 100 = 116 \implies EC = \sqrt{116}$ cm.
 - Dans le triangle FDC rectangle en D : $FD = 10 - 2,5 = 7,5$ cm et $DC = 10$ cm.
 $FC^2 = FD^2 + DC^2 = 7,5^2 + 10^2 = 56,25 + 100 = 156,25 \implies FC = \sqrt{156,25} = 12,5$ cm.
2. Test d'égalités pour l'équerrage du triangle FEC :
 - D'une part, $FC^2 = 156,25$.
 - D'autre part, $EF^2 + EC^2 = 42,25 + 116 = 158,25$.Comme $FC^2 \neq EF^2 + EC^2$, le triangle FEC **n'est pas rectangle**.