

1 Somme et produit

► Définition :

- **Développer**, c'est transformer un produit en une somme.
- **Factoriser**, c'est transformer une somme en un produit.

Exemples de distinctions entre sommes et produits :

Sommes de termes	Produits de facteurs
$x - 3$	$(6x + 1) \times (x - 1)$
$(2x + 4) + 3x$	$2 \times (1 + 6x)$
$(5 - x) - (9 + 9x)$	$(8 - x) \times (2 + x)$
$3 + (2 + 3x)(x - 2)$	$(3 + 8x) \times (x - 8)^2$

2 Développement

a Distributivité simple

Pour tous nombres a , b et c

$$a(b + c) = ab + ac$$

► Exemple :

$$6 \times (x + 5) = 6x + 30$$

$$x(4 - y) = 4x - xy$$

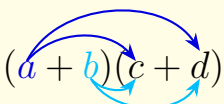
$$-(5 - x) = -5 + x \quad (\text{Un } - \text{ devant une parenthèse change les signes dans la parenthèse})$$

Remarque : Règle des signes :

- + par + devient +
- par - devient +
- + par - devient -
- par + devient -

b Double distributivité

► **Propriétés** : Quels que soient les nombres a , b , c et d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$


► **Exemple** :

$$A = (2x+3)(x+8) = 2x \times x + 2x \times 8 + 3 \times x + 3 \times 8 = 2x^2 + 16x + 3x + 24 = 2x^2 + 19x + 24$$

$$B = (-3+x)(4-5x) = -3 \times 4 + (-3) \times (-5x) + x \times 4 + x \times (-5x) = -12 + 15x + 4x - 5x^2 = -5x^2 + 19x - 12$$

$$C = 2(3+x)(3-2x) = 2(9 - 6x + 3x - 2x^2) = 2(-2x^2 - 3x + 9) = -4x^2 - 6x + 18$$

$$D = 2x(1-x) - (x-3)(3x+2) = 2x - 2x^2 - (3x^2 + 2x - 9x - 6) = 2x - 2x^2 - 3x^2 - 2x + 9x + 6 = -5x^2 + 9x + 6$$

3 Factorisation

► **Définition :** Pour **factoriser**, il faut trouver dans chaque terme un **facteur commun**.

► Exemple :

Factorisation par recherche d'un facteur commun simple :

$$A = 3, 5x - 4, 2x + 2, 1x = x(3, 5 - 4, 2 + 2, 1) = 1, 4x$$

$$B = 4t - 5tx + 3t = t(4 - 5x + 3) = t(7 - 5x)$$

$$C = 4x - 4y + 8 = 4 \times x - 4 \times y + 4 \times 2 = 4(x - y + 2)$$

$$D = x^2 + 3x - 5x^2 = x \times x + 3x - 5x \times x = x(x + 3 - 5x) = x(-4x + 3)$$

$$E = 3t + 9u + 3 = 3 \times t + 3 \times 3u + 3 \times 1 = 3(t + 3u + 1)$$

$$F = 3x^2 - x = 3x \times x - 1 \times x = x(3x - 1)$$

► Exemple :

Factorisation avec un facteur commun complexe :

$$A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x) = (2 + 3x)[3 - (5 + 2x)] = (2 + 3x)(3 - 5 - 2x) = (2 + 3x)(-2 - 2x)$$

$$B = (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x) = (2 - 5x)(2 - 5x) - (2 - 5x)(1 + x) = (2 - 5x)[(2 - 5x) - (1 + x)] = (2 - 5x)(2 - 5x - 1 - x) = (2 - 5x)(1 - 6x)$$

Remarque : Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes :

$$C = 5(1 - 2x) - (4 + 3x)(2x - 1) = 5(1 - 2x) + (4 + 3x)(1 - 2x) = (1 - 2x)[5 + (4 + 3x)] = (1 - 2x)(9 + 3x)$$

4 Identités remarquables

► **Propriétés** Quels que soient les nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Remarque : Illustration géométrique : En considérant les aires dans un carré de côté $a + b$, l'aire totale découpée donne $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

► **Exemple :**

1) Utilisation des identités remarquables pour développer :

- $A = (x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $B = (3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$
- $C = (x - 3)(x + 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
- $D = (2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
- $E = (4 - 3x)(3x + 4) = (4 - 3x)(4 + 3x) = 4^2 - (3x)^2 = 16 - 9x^2$

► **Exemple :**

Développements complexes :

- $A = (2x - 3)^2 + (x + 5)(3 - x) = (4x^2 - 12x + 9) + (3x - x^2 + 15 - 5x) = 3x^2 - 14x + 24$
- $B = (x - 3)(x + 3) - (4 - 3x)^2 = (x^2 - 9) - (16 - 24x + 9x^2) = x^2 - 9 - 16 + 24x - 9x^2 = -8x^2 + 24x - 25$
- $C = 2(x + 3) + (2x + 3)(2x - 3) = 2x + 6 + (2x)^2 - 3^2 = 2x + 6 + 4x^2 - 9 = 4x^2 + 2x - 3$

► **Exemple :**

2) Utilisation des identités remarquables pour factoriser :

- $A = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \quad (a = x, b = 1)$
- $B = 4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2 \quad (a = 2x, b = 3)$
- $C = 9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2) \quad (a = 3x, b = 2)$
- $D = 25 + 16x^2 - 40x = 25 - 40x + 16x^2 = (5 - 4x)^2 \quad (a = 5, b = 4x)$
- $E = 1 - 49x^2 = (1 - 7x)(1 + 7x) \quad (a = 1, b = 7x)$

► **Exemple :**

Factorisations de la forme $a^2 - b^2$ avec des expressions complexes :

- $A = (2x + 3)^2 - 64 = (2x + 3)^2 - 8^2 = [(2x + 3) - 8][(2x + 3) + 8] = (2x + 3 - 8)(2x + 3 + 8) = (2x - 5)(2x + 11)$
- $B = 1 - (2 - 5x)^2 = 1^2 - (2 - 5x)^2 = [1 - (2 - 5x)][1 + (2 - 5x)] = (1 - 2 + 5x)(1 + 2 - 5x) = (-1 + 5x)(3 - 5x)$